Laboratorio di ST1
Lezione 5

Claudia Abundo

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi Roma Tre

9 Aprile 2010

Funzione di verosimiglianza per il modello normale
in input:
- mu : valore medio
- sigma2 : varianza
- campione : campione osservato

```
verosimNormale <- function(mu, sigma2, campione){
n <- length(campione)

fattore1 <- (2 * pi * sigma2) ^ (-(n/2))
fattore2 <- exp(-1/(2*sigma2) * sum((campione - mu)^2))

fattore1 * fattore2
}
```

CASO 1
sigma noto e mu incognito
caso 1: supponiamo che la varianza sia nota e pari a 12
campione di 10 osservazioni estratto da una variabile casuale normale

```
campioneOsservato <- c(28, 19, 30, 25, 27, 27, 28, 20, 26, 28)
```

per valutare la funzione di verosimiglianza su differenti valori del parametro è necessario *vettorizzare* la funzione usando la funzione Vectorize si usano come argomenti di vettorizzazione sia mu che sigma2 in modo da utilizzare la funzione anche per gli altri casi (di media nota e varianza incognita e di media incognita e varianza incognita)

```
verosimNormaleVec <- Vectorize(verosimNormale,
vectorize.args=c("mu","sigma2"))
verosimNormaleVec(c(22,25), 12, campioneOsservato)
```

costruisco un vettore di valori per mu su cui valutare la funzione di verosimiglianza

```
ascisseMu <- seq(18, 30, by=0.1)
```

calcolo la funzione di verosimiglianza per il campione osservato ipotizzando di conoscere il valore di sigma2

```
ordinate <- verosimNormaleVec(ascisseMu, 12, campioneOsservato)
```

normalizzo la funzione di verosimiglianza

```
ordinate <- ordinate / max(ordinate)
```

e la rappresento graficamente

```
plot(ascisseMu, ordinate, type="l",
     xlab=expression(mu), ylab=expression(paste("L(",mu,")")))
```

costruisco un secondo campione ha la stessa media del campione precedente ma un numero di osservazioni pari a 50 replicando per 50 volte la media del campione osservato

```
campione2 <- rep(mean(campioneOsservato), 50)
```

calcolo e normalizzo la funzione di verosimiglianza relativa al secondo campione

```
ordinate2 <- verosimNormaleVec(ascisseMu, 12, campione2)
ordinate2 <- ordinate2 / max(ordinate2)
```

e la rappresento sul grafico usando una linea di colore rosso

```
lines(ascisseMu, ordinate2, col="red")
```

aggiungo una legenda al grafico

```
legend("topright",c("n = 4","n = 50"),col=c(1,2),pch=15)
```

CASO 2
mu noto e sigma incognito
caso 2: supponiamo che la media sia nota e pari a 26
costruisco un vettore di valori per sigma2 su cui valutare la funzione di verosimiglianza

```
ascisseSig <- seq(1, 50, by=0.1)
```

calcolo e normalizzo la funzione di verosimiglianza sul campione osservato ipotizzando di conoscere il valore di mu

```
ordinate <- verosimNormaleVec(26, ascisseSig, campioneOsservato)
ordinate <- ordinate / max(ordinate)
```

e la rappresento graficamente

```
plot(ascisseSig, ordinate, type="l",
     xlab=expression(sigma), ylab=expression(paste("L(",sigma,")")))
```

secondo campione di 50 osservazioni

```
campione3 <- c(31.38608, 23.26010, 21.64751, 31.26172, 29.12355,
26.74486, 31.25434, 28.44542, 28.99208, 17.38735, 29.03265,
26.15551, 27.09402, 24.49145, 22.47440, 26.43422, 28.48345,
22.86583, 24.51925, 25.93945, 23.86060, 23.07029, 27.70992,
31.68761, 25.37425, 23.74364, 23.04960, 23.57411, 25.24512,
26.35674, 23.77628, 27.78201, 22.23127, 26.71575, 25.61334,
29.77525, 20.40043, 31.26144, 21.81445, 30.65199, 24.65500,
23.56402, 24.01116, 22.38173, 21.52463, 24.55481, 19.40000,
21.79867, 28.40000, 29.64880)
```

i due campioni in questo caso hanno la stessa varianza campionaria (non corretta)

calcolo e normalizzo la funzione di verosimiglianza relativa al secondo campione di 50 osservazioni

```
ordinate2 <- verosimNormaleVec(26, ascisseSig, campione3)
ordinate2 <- ordinate2 / max(ordinate2)
```

e la rappresento sul grafico usando una linea di colore rosso

```
lines(ascisseSig, ordinate2, col="red")
```

aggiungo una legenda al grafico

```
legend("topright",c("n = 4","n = 50"),col=c(1,2),pch=15)
```

CASO 3
mu e sigma entrambi incogniti
se voglio passare in input due vettori, uno per il parametro mu e l'altro per sigma2, non posso usare la chiamata tradizionale (come risulta dal messaggio di warning prodotto)

```
verosimNormaleVec(ascisseMu, ascisseSig, campioneOsservato)
```

la funzione outer permette di costruire una griglia bidimensionale attraverso il prodotto cartesiano dei due vettori passati in input come primi due argomenti; il terzo argomento ad outer indica che la funzione che deve essere valutata su ogni cella di tale griglia

```
ordinate3d <- outer(ascisseMu, ascisseSig, verosimNormaleVec,
campioneOsservato)
```

un plot 3d può essere ottenuto usando la funzione persp

```
persp(ascisseMu, ascisseSig, ordinate3d)
```

la funzione contour permette di ottenere il grafico delle curve di livello

```
contour(ascisseMu, ascisseSig, ordinate3d)
```

Esempio
Considerando il dataset airquality residente in R, assumiamo di essere interessati a modellare il vettore y delle concentrazioni di ozono rilevate nel mese di maggio

```
data(airquality)
dati<-subset(airquality,complete.cases(airquality)==T)
y<-dati$Ozone[dati$Month==5]
```

La funzione subset ha il compito di eliminare i valori mancanti dal dataset.
L'istogramma dei dati

```
hist(y,freq=F,main="maggio",ylim=c(0,0.035),
 xlim=c(0,max(dati$Ozone)),xlab="ozono")
```

suggerisce la possibilità di modellare i dati mediante una distribuzione Gamma

La seguente funzione stima i parametri della gamma mediante il metodo dei momenti

```
momenti.gamma<-function(y){
sigma2<-sum(y^(2))/length(y)-(mean(y))^(2)
s.hat<-sigma2/mean(y)
a.hat<-(mean(y))^(2)/sigma2
out<-list(shape=a.hat,rate=1/s.hat)
return(out)
}
```

```
momenti.gamma(y)
```

Sovrapponiamo all'istogramma la densità Gamma stimata:

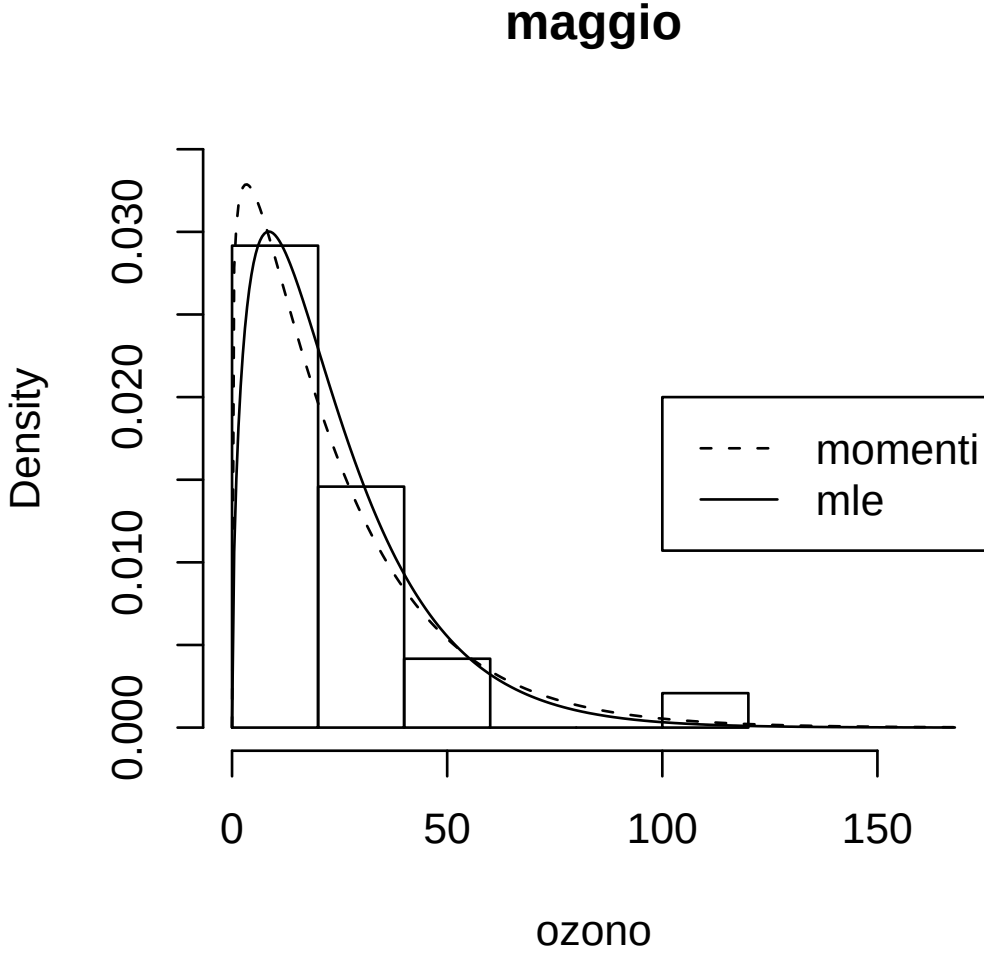
```
xx<-seq(0,max(dati$Ozone),by=0.5)
stime.m<-momenti.gamma(y)
lines(xx,dgamma(xx,shape=stime.m$shape,rate=stime.m$rate),lty=2)
```

La stima di massima verosimiglianza può essere invece realizzata mediante il comando fitdistr, disponibile nella libreria MASS: il comando usa un algoritmo iterativo per la stima dei parametri e richiede l'inserimento di valori iniziali.

```
library(MASS)
y.fit<-fitdistr(y,'gamma',start=stime.m,
 method='L-BFGS-B',lower=0.001)
 lines(xx,dgamma(xx,shape=y.fit$estimate[1],
 rate=y.fit$estimate[2]))
 legend(100,0.020,lty=c(2,1),
legend=c("momenti","mle"))
```

Calcoliamo gli errori standard delle stime trovate:

```
y.fit$sd
```


maggio
Density
0.000
0.010
0.020
0.030
0
50
100
150
ozono
momenti
mle